Temi d'esame di Fondamenti di Ricerca Operativa D
(2a parte del corso)

Problema 1

Una nota azienda automobilistica produce due modelli di auto (un'utilitaria e una berlina), che rivende con un guadagno unitario al netto dei costi di produzione pari a 6 000 e 13 000 Euro, rispettivamente. Produrre un'utilitaria richiede 40 ore di manodopera, mentre produrre una berlina ne richiede 60. Si vuole pianificare la produzione di utilitarie e berline in 3 mesi, in ognuno dei quali si hanno a disposizione 40 000 ore di manodopera. La domanda mensile è invece data dalla seguente tabella.

Domanda	Primo mese	Secondo mese	Terzo mese
Utilitarie	450	500	600
Berline	200	150	180

È inoltre possibile utilizzare un garage della capacità di 4 000 mq per fronteggiare i mesi in cui la domanda supera la capacità produttiva dell'azienda. L'ingombro di un'utilitaria è di 7 mq, mentre quello di una berlina è di 10 mq.

Formulare un modello di programmazione lineare intera per pianificare il numero di utilitarie e di berline prodotte e immagazzinate in ciascuno dei tre mesi, in modo tale da massimizzare il guadagno dell'azienda.

Variabili di decisione

Funzione obiettivo

Vincoli

Problema 2

L'Assessorato regionale all'ambiente deve coordinare la depurazione delle acque del Lario rimuovendo almeno 80 tonnellate di inquinante di tipo 1 e almeno 50 tonnellate di inquinante di tipo 2. Vengono individuati quattro siti (A, B, C, D) idonei alla costruzione delle centrali di depurazione. I costi di installazione, di trattamento per tonnellata di acqua, e la capacità di estrazione degli inquinanti per tonnellata di acqua sono riassunti nella seguente tabella.

Sito	Costo costruzione	Costo depurazione (per tonnellata)	Percentuale rimossa (Inquinante 1)	Percentuale rimossa (Inquinante 2)
1	100.000	20	0.40%	0.35%
2	70.000	30	0.25%	0.25%
3	80.000	30	0.30%	0.20%
4	40.000	35	0.15%	0.22%

L'Assessore impone anche alcuni vincoli paesaggistici: se vengono costruite le centrali nei siti 1 e 3 non può essere costruita quella nel sito 2.

1) Formulare un modello di programmazione matematica per determinare dove costruire le centrali di depurazione, minimizzando la somma dei costi di installazione e di gestione.
2) Descrivere il modello mediante il linguaggio AMPL/MOSEL.

Modello di programmazione matematica:

Modello completo in AMPL/MOSEL da descrivere sul retro della pagina precedente

Problema 3

Una raffineria miscela 4 tipi di petrolio greggio in diverse proporzioni per ottenere 3 diversi tipi di benzina: normale, super e senza piombo. La massima quantità disponibile in ciascun componente greggio e il corrispondente costo di acquisto sono indicati nella seguente tabella:

Componente	Disponibilità max (barili)	Costo (euro/barile)
1	5000	9
2	2400	7
3	4000	12
4	1500	6

Per potere soddisfare le specifiche qualitative dei diversi tipi di benzina è necessario rispettare dei limiti assegnati circa la percentuale di ciascun componente impiegato. Tali limiti insieme ai prezzi di vendita delle benzine sono indicati nella tabella che segue:

Benzina	Specifiche qualitative	Prezzo(euro/barile)
Normale	almeno il 20% di 2	12
Normale	al massimo il 30% di 3	
Super	almeno il 40% di 3	18
SenzaPb	al massimo il 50% di 2	10

Si vuole determinare il mix ottimale dei quattro componenti che massimizzi il guadagno totale derivante dalla vendita delle benzine. Dato il modello e i risultati di AMPL allegati (ottenuti con CPLEX), rispondere alle seguenti domande **motivando ogni risposta** sulla base dei concetti fondamentali della Programmazione Lineare:

1. A quanto ammonta il guadagno totale della raffineria all'ottimo? Quali sono i livelli ottimi di produzione delle 3 benzine?

2. Ci sono dei componenti greggi non completamente utilizzati? Se, sì quali?

3. A quale massimo costo la raffineria sarebbe disposta ad acquistare un ulteriore barile del componente 2?

4. Quanto valgono i costi ridotti delle variabili x[3,“Super”] e x[4,“Normale”]?

5. Esistono piani di produzione ottimali alternativi a quello ottenuto da AMPL (Mosel)?

NB: Il linguaggio di modellizzazione adoperato in questo esempio (AMPL) è molto simile a MOSEL e le informazioni fornite da CPLEX sono le stesse

```
#File raffineria.mod - Modello del problema della raffineria

set  Benzine;
set Componenti;

param Disp_max{Componenti} >=0;  # disponibilita' massima dei componenti
```

```
param Costi{Componenti} >=0; # costi dei componenti

param Prezzi{Benzine} >=0; # prezzi di vendita benzine

# barili del componente i usati per produrre la benzina di tipo j
var x{i in Componenti, j in Benzine}>=0;

maximize guad_tot : sum{i in Componenti, j in Benzine}
                   (Prezzi[j]*x[i,j]-Costi[i]*x[i,j]);

subject to vincoli_disp{i in Componenti}:
           sum{j in Benzine}x[i,j]<=Disp_max[i];

# vincoli sulle specifiche qualitative

subject to specifica1:
x[2,"Normale"]>= 20/100*sum{i in Componenti}x[i,"Normale"];

subject to specifica2:
x[3,"Normale"]<= 30/100*sum{i in Componenti}x[i,"Normale"];

subject to specifica3:
x[3,"Super"]>= 40/100*sum{i in Componenti}x[i,"Super"];

subject to specifica4:
x[2,"SenzaPb"]<= 50/100*sum{i in Componenti}x[i,"SenzaPb"];

#File raffineria.dat

set  Benzine:= Normale Super SenzaPb;
set Componenti:= 1 2 3 4;

param Disp_max:= 1   5000
 2   2400
 3   4000
 4   1500 ;

param Costi:=   1   9
2   7
3   12
4   6 ;

param Prezzi:=  Normale  12
Super    18
```

```
SenzaPb  10;

Output:

CPLEX 8.0.0: optimal solution; objective 161400
2 dual simplex iterations (1 in phase I)

display x;
x :=
1 Normale   5000
1 SenzaPb      0
1 Super        0
2 Normale   2400
2 SenzaPb      0
2 Super        0
3 Normale   3100
3 SenzaPb      0
3 Super      900
4 Normale   1500
4 SenzaPb      0
4 Super        0;

display x.rc;
x.rc :=
1 Normale     0
1 SenzaPb    -8
1 Super       0
2 Normale     0
2 SenzaPb   -28
2 Super     -20
3 Normale     0
3 SenzaPb    -8
3 Super       ?
4 Normale     ?
4 SenzaPb    -8
4 Super       0;

display vincoli_disp;
vincoli_disp [*] :=
1   9
2  31
3   6
4  12;
```

Problema 4

Dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min\ z = -x_1 - 2x_2 + x_3 & \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 6 \\ 2x_2 - x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

---

a) Porre il problema in forma standard.

b) Indicare un limite superiore sul numero di soluzioni di base ammissibili del problema in funzione del numero di vincoli e di variabili.

c) Risolvere il problema mediante l'algoritmo del simplesso (applicando la regola di Bland). Indicare solo la soluzione ottima trovata e il valore della funzione obiettivo, riportando tutti i passaggi sul retro del foglio precedente.

d) A cosa corrisponde il costo ridotto di una variabile fuori base dal punto di vista della funzione obiettivo? Indicare i costi ridotti delle variabili fuori base nella soluzione ottima trovata.

e) Scrivere il problema duale.

f) Determinare la soluzione ottima del duale da quella ottima del primale, precisando chiaramente come si procede.

Problema 5

Dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{rcl} \min z = 3x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 & & \\ x_1 + x_2 - x_3 & \geq & 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & \geq & -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

---

a) Scrivere il problema duale.

b) Risolvere il problema duale per via geometrica.

c) Determinare la soluzione ottima del problema primale a partire da quella ottima del problema duale. Enunciare e spiegare il risulato sul quale si basa il passaggio.

Problema 6

Dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{aligned}
\max\ z = -x_1 + 2x_2 & \\
x_2 &\leq 3 \\
-x_1 + x_2 &\leq 1 \\
-x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

---

a) Porre il problema in forma standard.

b) Compiere **due** iterazioni del metodo del simplesso con la regola di Bland. Indicare solo la soluzione trovata e il valore corrispondente della funzione obiettivo, riportando tutti i passaggi sul retro della pagina precedente.

c) Spiegare perché la soluzione trovata è ottima. Esistono altre soluzioni ottime alternative? Motivare la risposta.

d) Scrivere il problema duale.

e) Enunciare le condizioni degli scarti complementari per questa coppia di problemi primale e duale. Determinare una soluzione ottima del duale.

f) A cosa corrisponde dal punto di vista economico il prezzo ombra di un vincolo di minore o uguale? Indicare il valore del prezzo ombra del secondo vincolo.

Problema 7

Risolvere il seguente problema di programmazione lineare intera

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + x_2 \\
4x_1 - 2x_2 &\geq 1 \\
4x_1 + 2x_2 &\leq 11 \\
6x_2 &\geq 3 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \ \text{intere}
\end{aligned}
$$

mediante l'algoritmo di Branch-and-Bound risolvendo i rilassamenti lineari graficamente. Elaborare per primi i sottoproblemi con il bound più promettente. Se la soluzione di un rilassamento ha più coordinate frazionarie, effetuare il branching su una di quelle con parte frazionaria più vicina a 0.5.

---

a) Indicare la soluzione ottima trovata e il relativo valore della funzione obiettivo, riportando tutti i passaggi (risoluzione dei sottoproblemi) sul retro del foglio precedente.

b) Albero decisionale: